Μαθημα 17ο $\qquad$ 10/5/2017

Τοπολογια

Ασκ 3, φυλ #2

$y \in f(\bar{x}) \subseteq \overline{f(x)}$

$y = f(a)$, $a \in \bar{x} \Rightarrow$ ακολ.

Είναι μια άσκηση - θεωρία

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ βασική

$\left.\begin{array}{l}(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ υπακολ.} \\ a_{k_n} \xrightarrow{\rho} \ell\end{array}\right\} \Rightarrow a_n \xrightarrow{\rho} \ell$

απόδειξη με τη βοήθεια της άσκησης ②

$\overset{Ασκ}{\Rightarrow} \rho(a_n, a_{k_n}) \to 0$

$0 \le \rho(a_n, a_{k_n}) \le \underbrace{\rho(a_n + a_{k_n})}_{\to 0 \text{ από ασκ}} + \underbrace{\rho(a_n, \ell)}_{\to 0 \text{ θεωρία}} \to 0$

Ασκ 2, φυλ #2

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ βασική

$(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \rho(a_n, a_{k_n}) \to 0$

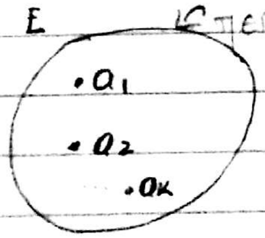
Άσκηση

Δίνεται (E,ρ) με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $E = \{a_1, \dots, a_k\}$. Δ.ο. ο (E,ρ) πλήρης

Λύση

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο E. Θδο $\exists \ell \in E : x_n \xrightarrow{\rho} \ell$

E πεπερασμένο



$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ (άπειρο)

Λόγω υπόθεσης $\exists i \in \{1,2,\dots,k\}$: $x_n = a_i$ για άπειρα n

$\{n : x_n = a_i\} = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$

$\Rightarrow x_{k_n} = a_i \quad \forall n = 1,2,\dots$

Η $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ειναι υπακολουθια της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και μαλιστα σταθερη και απο οριςμο θα συγκλινει στον σταθερο ορο δηλ $x_{k_n} \to a_i$ ομως $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασικη, αρα:

$x_n \xrightarrow{\rho} a_i \Rightarrow (x_n)_n$ συγκλινουσα $\Rightarrow (E,\rho)$ πληρης

⊛ $\{a_j\}$ κλειστο $\subseteq (E,\rho)$ $\forall$ μετρικο χωρο

$\{a_j\}$ ανοιχτο στο E?

$\Leftrightarrow E - \{a_j\} = \{a_1, \dots, a_{j-1}, a_j, \dots, a_k\}$ κλειστο

$E - \{a_j\} = \bigcup_{i\neq j} \{a_i\}$ (πεπερασμ. ενωση κλειστων ειναι κλειστο $^{(1)}$)

Με βαση (1) $E-\{a_j\}$ κλειστο $\Rightarrow \{a_j\}$ ανοιχτο

$\{a_i\}$ κλειστο στο E

$x_n \xrightarrow{\rho} a_i \Rightarrow a_i \in \{a_i\}$, αρα και η ακολουθια σταθερη

$\Rightarrow x_n \in \{a_i\}$

Ολικά φραγμενος μ.χ

Ορισμος: Ο (E,ρ) ολικά φραγμενος αν.ν

$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0,\ \exists n\in\mathbb{N} \text{ και } x_1, x_2, \dots, x_n \in E : \\ \quad \forall y \in E \quad \exists i \in \{1,\dots,n\} : \rho(y, x_i) < \varepsilon \end{array}\right\} (1)$

⊛ $\mathbb{Q}$: ε-πυκνο $\subseteq \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon>0$

απλοποιηση οριςμου (ολικα φραγμενο)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists$ πεπερ. ε-πυκνο $\subseteq E$

① $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists x_1, \dots, x_n \in E$

$E = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ ο (E, ρ) ειναι ολικά φραγμενος

(αν.χ) $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ πεπερ. καλυψη του E απο σφαιρες με κεντρα στο E και ακτινες ακεραιες $\varepsilon>0$

Ορισμος (ολοκληρος 8ρ)

Ο (E, ρ) ειναι μ.χ. Το $\emptyset \neq S \subseteq E$ θα λεγεται ολικα φραγμενο υποσυνολο του E $\Leftrightarrow$ Ο (S, ρ_S) υποχωρος ειναι ολικά φραγμενος

! (S, ρ_S) ολικά φραγμενος $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists x_1, \dots, x_n \in S$

$S = \bigcup B_S(x, \varepsilon)$, $S \subseteq B_{(E,\rho)}(x_i, \varepsilon)$,

$S = \underbrace{\bigcup B_S(x_i, \varepsilon)}$ ①

$\Uparrow \Downarrow$

$S \subseteq \bigcup B_E(x_i, \varepsilon)$ ②

$B_S(x_i, \varepsilon) = B_E(x_i, \varepsilon) \cap S$

$B_S(x_i, \varepsilon) \subseteq B(x_i, \varepsilon)$

② $\Rightarrow$ ① Παιρνω τομες με το S και εχω

$S = S \cap S \subseteq \bigcup [B_E(x_i, \varepsilon) \cap S] \subseteq S$

$(y_n)_n \subseteq A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

$y_1 = x_1$

..... ;

Προταση (χωρις αποδειξη)

(E,ρ) ολικα φραγμενο, $\emptyset \neq S \subseteq E \Rightarrow S$ ολικα φραγμενο $\subseteq E$

Πορισμα

(E,ρ) μ.χ $B \subseteq A$, A ολικα φραγμενο $\subseteq E \Rightarrow B$ ολικα φραγμενο

Αποδειξη

$B \subseteq A$, (A,ρ_A) ολικα φραγμενο

$\overset{\text{προτ.}}{\Rightarrow}$ B ολικα φραγμ $\subseteq (A,\rho_A) \Rightarrow B$ ολικα φραγμ $\subseteq (E,\rho)$

προτ $\Downarrow$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\ x_1,\dots,x_n\in B : B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_A(x_i,\varepsilon) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{(E,\rho)}(x_i,\varepsilon)$

$\Rightarrow B$ ολικα φραγμ

ισχυει $B_A(x_i,\varepsilon) = B_E(x_i,\varepsilon)\cap A$

Προταση

$f:(E_1,\rho_1)\to(E_2,\rho_2)$ ομοιομ. συνεχης, επι $(f(E_1)=E_2)$

(E_1,ρ_1) ολικα φραγμ. $\Rightarrow E_2$ ολικα φραγμ

Στοχος: ΝΔΟ $\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}$, $y_1,\dots,y_n\in E_2$, $E_2=\bigcup_{j=1}^{n} B_{E_2}(y_j,\varepsilon)$ (1)

f ομοιομ. συνεχης για το $\varepsilon>0$. $\exists\delta>0$ $\forall$ $x,x'\in E_1$ (3) με

$\rho_1(x,x')<\delta \Rightarrow \rho_2(f(x),f(x'))<\varepsilon$

(E_1,ρ_1) ολ. φραγμ. $\Rightarrow \exists$ δ-πυκνο $\subseteq E_1$

Δηλ $\exists n\in\mathbb{N}$, $x_1,\dots,x_n\in E_1 : E_1=\bigcup_{(E_1,\rho_1)} B(x_i,\delta)$ (2)

ισχυει (2),(3) $\Rightarrow$ (1)

πραγματι για αυτα τα (y_j) δ.ο ισχυει η (1)

Θετουμε $y_j=f(x_j)$ $j=1,2,\dots,n$

Εστω $y\in E_2$ ΘΔΟ $y\in\bigcup_{j=1}^{n} B_{E_2}(f(x_j),\varepsilon) \Rightarrow (f$ επι$)$ $\exists\ x\in E_1$

$f(x)=y$

$x\in E_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \exists\ i\in\{1,\dots,n\}\ \rho_1(x,x_i)<\delta$

$\rho_2(y,y_j)=\rho_2(f(x),f(x_i))<\varepsilon \Rightarrow$ (1)

⊕ (E,ρ), A ολικα φραγμ $\subseteq E \Rightarrow$ φραγμενο

Πχ (E,ρ) φραγμενος, οχι ομως ολικα φραγμ.

$\emptyset \neq E$ τυχαιο, E απειρο, ρ διακριτη μετρικη στο E

Τοτε $\delta(E) = 1 < \infty \Rightarrow (E,\rho)$ φραγμ

(E,ρ) οχι ολικα φραγμ

Αν ο (E,ρ) ολ. φραγμ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E$

$E = \bigcup_{i=1}^{n} B_\rho(x_i, \varepsilon)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ) Φυλλάδιο 2:

1. Έστω (E,ρ) μ.χ. και ακολουθία του $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$a_n \in [B(y,r)]^c, \forall n\in\mathbb{N}$, με κάποια $y\in E$, $r>0$.

Υποθέτουμε επίσης ότι $\exists \lim a_n = \ell$. Δείξτε ότι

$\rho(\ell,y) \geq r$

2. (E,ρ) μ.χ. και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$. βασική ακολουθία.

Έστω επίσης τυχούσα υπακολουθία $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Δείξτε ότι $\exists \lim_n \rho(a_n, a_{k_n}) = 0$.

3. Δείξτε με χρήση ακολουθιών την εξής πρόταση:

Αν $f:(E_1,\rho_1) \to (E_2,\rho_2)$ συνεχής, τότε $\forall X \subseteq E_1$

$f(\overline{X}) \subseteq \overline{f(X)}$

4.* Δίνεται μ.χ. (E,ρ) και ακολουθία του $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε

$x_n \xrightarrow{\rho} x$, με $x\in E$. Δείξτε ότι το σύνολο

$A = \{x_n : n\in\mathbb{N}\} \cup \{x\}$, (που περιλαμβάνει δηλαδή ως στοιχεία ακριβώς τους όρους της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, μαζί με το όριο), είναι κλειστό υποσύνολο του (E,ρ). (Υπόδειξη: Δείξτε ότι το $A^c = E - A$, είναι ανοικτό υποσύνολο του (E,ρ)).